数理解析研究所講究録
532巻 1984年 1-21

MHD系の線形安定理論について

電気通信大学 牛島照夫 (Teruo Ushijima)

共同研究の際には,「トカマク型プラズマ閉じこめにおける数学研究の役割 —経過報告,可能性を求めて— 」との演題の下に,かなり詳細な予稿集を作成し,その予稿にもとづき講演を行なった。本稿では,その予稿集から,本標題に関する部分を抜粋して述べる。

1. MHD方程式系

トカマク型閉じこめで通常使われるMHD系は,

(1) $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} v$,

(2) $\rho\frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + J\times B$,

(3) $\frac{D}{Dt}(P\rho^{-\gamma}) = 0$,

(4) $\frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot} E$,

(5) $\operatorname{div} B = 0$,

(6) $\operatorname{rot} B = \mu J$,

(7) $\eta J = E + v \times B$

のように表わされる。このモデルでは，プラズマは空间内の有界領域Ω_p全体にひろがっている一成分流体と考えている。その密度がρ，速度がvである。スカラー関数Pは圧力，ベクトル関数B，E，Jは，それぞれ，磁束密度，電場，電流密度である。慣習的にBは磁場とよばれている。μは真空の透磁率をあらわす正定数，γは比熱比（＝定圧比熱／定積比熱）で，$\gamma = 5/3$などがよく使われる。ηは電気抵抗である。質量微分：$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v, \nabla)$ と勾配演算子：$\nabla = \mathrm{grad}$を用いた。記号$\times$は通常のベクトル外積を表わしている。

（1）は質量保存則である。

（2）の運動方程式において，力の項に流体の粘性の効果を考えないところにこの定式化の一つの特徴がある。圧力勾配と電磁場の相互作用によって生じる力が主要項である。$F = J \times B$は，いわゆる，フレミング左手の法則に起因する。

（3）は断熱条件の式とよばれているが，（1）の下では

(3)' $\frac{DP}{Dt} = -\gamma P \,\mathrm{div}\, v$

を要請するのと同等である。

（4）はマックスウエル方程式を構成するファラディーの電磁誘導の法則である。

（5）は単極磁場の不存在をあらわす。

（6）はアンペールの電流磁気関係の法則：

（6）$_0$ $\dfrac{\partial D}{\partial t} + J = \mathrm{rot}\, H$,

において，電気変位Dの時間変化が注目している閉じこめ現象の特徴的な時間に比して無視出来るものとし，さらに構成法則：

$$B = \mu H$$

を代入して得られる。（6）を単にアンペールの法則とよぶことも多い。

（7）はオームの法則であって，右辺の $E + v \times B$ はローレンツ力である。

抵抗 $\eta = 0$ のとき，理想MHD系とよぶ。このとき，（2），（4）は，それぞれ，

（2）$_0$ $\rho \dfrac{Dv}{Dt} = -\nabla P + \dfrac{1}{\mu} \mathrm{rot}\, B \times B$,

（4）$_0$ $\dfrac{\partial B}{\partial t} = \mathrm{rot}(v \times B)$

となり，（1），（2）$_0$，（3），（4）$_0$，（5）が理想MHD系の方程式となる。

プラズマ領域 Ω_p の閉包は有界領域 Ω に完全に含まれているとする。Ω_p，Ω の境界をそれぞれ Γ_p，Γ とあらわそう。Γ は完全電気伝導度をもつものと考える。$\Omega_v = \Omega - \overline{\Omega_p}$ を真空領域と考える。以后 Ω_p，Ω_v，Ω は全て連結してい

4

るものとしておく。

真空領域Ω_vでは，

(8) $\rho = P = 0, \ v = J = 0,$

$(4)_v$ $\dfrac{\partial B}{\partial t} = -\mathrm{rot}\, E,$

$(5)_v$ $\mathrm{div}\, B = 0,$

$(6)_v$ $\mathrm{rot}\, B = 0$

が成立していると考える。

境界Γでは，

(9) $n \times E = 0,$

又は，

(10) $(B, n) = 0$

を与える。nはΓの各点における外向き単位法線である。

(10)は$(4)_v$があるので(9)とは矛盾しないと考える。

プラズマ境界Γ_pでは，

$(10)_{p,v}$ $(B_p, n) = (B_v, n) = 0,$

(11) $(E_p + v_p \times B_p) \times n = (E_v + v_p \times B_v) \times n$

(12) $P_p + \dfrac{1}{2\mu} B_p^2 = \dfrac{1}{2\mu} B_v^2$

の三条件が成立しているものと考える。(10)と$(10)_{p,v}$は，ΓとΓ_pが，いわゆる，磁気面であることを要求している。(11)はプラズマに沿って測った電界の接平面成分の連続性の要求である。(12)は圧力平衡の式とよばれている。その

由縁は項を改めて説明する。(10)$_{p,v}$,(11),(12)において添字 p と v は，それぞれ，プラズマ側と真空側からの極限をあらわす。

2，平衡解と圧力平衡の境界条件．

$\eta=0$ として，(1.1)～(1.12)をみたす解で，速度が0で時間依存しない解を(静止)平衡解という。$\{\rho, v(=0), P, J, B, E(=0)\}$ が平衡解であるとすると，$\{P, J, B\}$ は，

$$(1)\quad \begin{cases} \nabla P = J\times B,\ \mathrm{div}\,B=0,\ \mathrm{rot}\,B=\mu J & \text{in } \Omega_p, \\ P=0,\quad \mathrm{div}\,B=0,\ \mathrm{rot}\,B=0 & \text{in } \Omega_v, \\ (B, n)=0 & \text{on } \Gamma_p\cup\Gamma, \\ P_p+\frac{1}{2\mu}B_p^{\,2} = \frac{1}{2\mu}B_v^{\,2} & \text{on } \Gamma_p \end{cases}$$

として記述される。

Ω_p において，力 $J\times B$ はマックスウエルの応力テンソルの磁気成分の発散として表わされる。すなわち，

$$(2)\quad J\times B = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{div}\left(BB-\frac{1}{2}B^2 I\right)$$

である。ここで，

$$BB=(B_iB_j)_{1\le i,j\le 3},\quad B^2=\sum_{i=1}^{3}B_i^{\,2},$$

$$I=(\delta_{ij})_{1\le i,j\le 3}$$

であり，(2)を成分表示すると，

$$(2)_i \quad (J\times B)_i = \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_iB_j - \delta_{ij}\frac{1}{2}B^2\right)$$

である。ただし，今固定した直交座標系 $O-x_1x_2x_3$ に応じた単位ベクトルを e_i として，$B=\sum_{i=1}^{3}B_i e_i$ とあらわせるものとした。Ω_p に含まれる任意の閉曲面 S を考えると，(1) と (2) により，

$$(3) \quad \oint_S \left[\left\{P+\frac{1}{2\mu}B^2\right\}I - \frac{1}{\mu}BB\right]n\,dS = 0.$$

ここで，n は S の外向き単位法線ベクトルである。

形式的に Ω_v でも，$\nabla P = J\times B$ はみたされているから，

$$(4) \quad \operatorname{div}\left\{\left(P+\frac{B^2}{2\mu}\right)I - \frac{1}{\mu}BB\right\} = 0 \quad \text{in } \Omega_p \cup \Omega_v$$

そこで Ω 全体で弱い意味（超関数の意味）での微分として

$$(5) \quad \operatorname{div}\left\{\left(P+\frac{B^2}{2\mu}\right)I - \frac{1}{\mu}BB\right\} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

が成立することを要請すると圧力平衡の条件式：

$$(1.12) \quad P_p + \frac{1}{2\mu}B_p^2 = \frac{1}{2\mu}B_v^2$$

が得られることに注意しよう。実際，

$$f_{pi} = \left(\left(P+\frac{1}{2\mu}B^2\right)\delta_{ij} - \frac{1}{\mu}B_iB_j\right)_{j=1,2,3} \quad \text{in } \Omega_p,$$

$$f_{vi} = \left(\frac{1}{2\mu}B^2\delta_{ij} - \frac{1}{\mu}B_iB_j\right)_{j=1,2,3} \quad \text{in } \Omega_v$$

とし，これらは，$\overline{\Omega_p}$ と $\overline{\Omega_v}$ で，それぞれ，連続なものとしよう。

$$f_i = \begin{cases} f_{pi} & \text{in } \Omega_p, \\ f_{vi} & \text{in } \Omega_v \end{cases}$$

と定めれば，f_i は Ω 上の可積分ベクトル値関数である。

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$の台が$\Gamma_p$と交わるものとする。超関数微分の定義から.

$$(\mathrm{div}\, f_i)(\varphi) = -\int_\Omega f_i \nabla\varphi\, dx$$
$$= -\int_{\Omega_p} f_{pi} \nabla\varphi\, dx - \int_{\Omega_v} f_{vi} \nabla\varphi\, dx$$
$$= -\int_{\Omega_p} \mathrm{div}(f_{pi}\varphi)\, dx + \int_{\Omega_p} \mathrm{div}\, f_{pi}\, \varphi\, dx$$
$$- \int_{\Omega_v} \mathrm{div}(f_{vi}\varphi)\, dx + \int_{\Omega_v} \mathrm{div}\, f_{vi}\, \varphi\, dx.$$

(4)より上式最右辺の第二項と第四項は0である。

$$(\mathrm{div}\, f_i)(\varphi)$$
$$= -\int_{\Gamma_p} (f_{pi}, n)\varphi\, d\Gamma - \int_{\partial\Omega_v} (f_{vi}, n)\varphi\, d\Gamma$$
$$= (\varphi\text{の台は有界だから})$$
$$= -\int_{\Gamma_p} \{(f_{pi}, n) - (f_{vi}, n)\} \varphi\, d\Gamma .$$

(5)の下では, φの任意性から

$$(f_{pi}, n) = (f_{vi}, n) \qquad \text{on } \Gamma_p$$

である。ところで Γ_pでは,

$$(f_{pi}, n) = (P_p + \tfrac{1}{2\mu} B_p^2) n_i - \tfrac{1}{\mu} B_{pi} (B_p, n)$$
$$(f_{vi}, n) = \qquad \tfrac{1}{2\mu} B_v^2\, n_i - \tfrac{1}{\mu} B_{vi} (B_v, n)$$

したがって. $(B_p, n) = (B_v, n) = 0$ より.

$$(f_{pi}, n) = (P_p + \tfrac{1}{2\mu} B_p^2) n_i ,$$
$$(f_{vi}, n) = \qquad \tfrac{1}{2\mu} B_v^2\, n_i$$

結局(5)の下では,

$$\{(P_p + \tfrac{1}{2\mu} B_p^2) - \tfrac{1}{2\mu} B_v^2\} n = 0$$

となって(1.12)が得られる。

(4)の下で(5)を期待するのは、物理的にはもっともなことと言ってよいであろう。

3. 線形化MHD方程式

1) 導出

平衡解

(1) $\{\rho, v=0, P, J, B, E=0\}$

が与えられたとしよう。$\{P, J, B\}$は(2.1)をみたしている。この平衡解の近くで次の形をした非定常理想MHD系の解$\{\tilde{\rho}, \tilde{v}, \tilde{P}, \tilde{J}, \tilde{B}, \tilde{E}\}$が存在したと考える。

(2) $\begin{cases} \tilde{\rho} = \rho + \varepsilon \rho_1, & \tilde{v} = \varepsilon v_1, & \tilde{P} = P + \varepsilon P_1, \\ \tilde{J} = J + \varepsilon J_1, & \tilde{B} = B + \varepsilon B_1, & \tilde{E} = \varepsilon E_1, \end{cases}$

ここで、εは十分小さい実のパラメタである。プラズマ領域Ω_pは変換:

(3) $\tilde{\mathbb{r}}(t, \mathbb{r}) = \mathbb{r} + \varepsilon \xi(t, \mathbb{r})$

によって$\tilde{\Omega}_p$にうつされていると考える。

(2)を方程式(1.1)〜(1.7)に代入する。ただし$\eta = 0$である。得られた方程式をεの中で整頓し、εの一次の項の係数を比較することによって、$\{\rho_1, v_1, P_1, J_1, B_1\}$に対する次の線形系が得られる。

$$(4)\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v_1) = 0, \\ \rho\dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\mathrm{grad}\, P_1 + J \times B_1 + J_1 \times B, \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial t} + (v_1, \nabla)P + \gamma P\, \mathrm{div}\, v_1 = 0, \\ \dfrac{\partial B_1}{\partial t} = \mathrm{rot}(v_1 \times B), \\ \mathrm{div}\, B_1 = 0. \end{cases}$$

初期条件として

$$(5) \quad \xi(0, \mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_p,$$

および

$$(6)\begin{cases} \rho_1(0,\mathbf{r}) = 0,\ P_1(0,\mathbf{r}) = 0,\ B_1(0,\mathbf{r}) = 0, \\ J_1(0,\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_p \end{cases}$$

を要求する。$\mathbf{r}_0 \in \Omega_p$ を固定すると，

$$v(t, \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\xi(t, \mathbf{r}_0)$$

であり，テイラー展開から，

$$v(t, \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)) = \varepsilon v_1(t, \mathbf{r}_0) + O(\varepsilon^2)$$

となるはずだから，上二式の ε の一次の係数を比較して，

$$(7) \quad v_1(t, \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial t}\xi(t, \mathbf{r}), \quad t > 0,\ \mathbf{r} \in \Omega_p$$

の成立を認めることとする。（7）を（4）に代入し，初期条件（5），（6）を使うと，

$$(8)\begin{cases} \rho_1 = -\mathrm{div}(\rho\xi) \\ \rho\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mathrm{grad}\, P_1 + \dfrac{1}{\mu}(\mathrm{rot}\, B \times B_1 + \mathrm{rot}\, B_1 \times B) \\ P_1 = -(\xi, \nabla)P - \gamma P\, \mathrm{div}\, \xi \end{cases}$$

$$B_1 = \mathrm{rot}(\xi \times B)$$

が，Ω_pで成立しているものと考えられる。

真空領域Ω_vでは，$\hat{B}$と$\hat{E}$を$(4)_v$, $(5)_v$, $(6)_v$に代入してεの一次の係数を比較して

$$(9)\begin{cases} \dfrac{\partial B_1}{\partial t} = -\mathrm{rot}\, E_1, \\ \mathrm{div}\, B_1 = 0, \\ \mathrm{rot}\, B_1 = 0 \end{cases}$$

が成立しているものと考える。さらに次の性質(10)をみたすB_1のベクトルポテンシャルαが存在すると考える。

$$(10)\begin{cases} B_1 = \mathrm{rot}\,\alpha, \quad E_1 = -\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} & \text{in } \Omega_v, \\ n \times \alpha(0, \mathrm{V}) = 0 & \text{on } \Gamma_p. \end{cases}$$

(9)の第三式をみたすために，

$$(11) \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\alpha = 0 \qquad \text{in } \Omega_v$$

を要請し，(1.10)をみたすために

$$(12) \quad n \times \alpha = 0 \qquad \text{on } \Gamma$$

を要請する。

接続条件(1.11)の処理をしよう。

$$(13) \quad \hat{E} + \hat{v} \times \hat{B} = 0 \qquad \text{in } \tilde{\Omega}_p$$

より，εの一次の係数を比較して，

$$(14) \quad E_{1p} + v_1 \times B_p = 0 \qquad \text{in } \overline{\Omega_p}$$

であると考える。(1.11)の両辺に$\hat{E}$, $\hat{v}$, $\hat{B}$を代入す

ることにより

(15) $n\times(E_{1p}+v_1\times B_p)=n\times(E_{1v}+v_1\times B_v)$

を得る。(15)の左辺に(14)，右辺に(10)と(7)を代入すると，

$$\begin{aligned}0&=n\times\left(-\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\xi}{\partial t}\times B_v\right)\\&=\frac{\partial}{\partial t}(n\times(-\alpha+\xi\times B_v))\\&=\frac{\partial}{\partial t}(-n\times\alpha+(n,B_v)\xi-(n,\xi)B_v)\end{aligned}$$

$(1,10)_v$ より

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\times\alpha+(n,\xi)B_v)=0 \quad \text{on } \Gamma_p$$

となる。初期条件(5)がΓ_p上でも成立するとし，初期条件(10)をあわせて使うと，

(16) $n\times\alpha=-(n,\xi)B_v \qquad \text{on } \Gamma_p$

となる。(16)を(1.11)から遺伝した接続条件と見なそう。

接続条件(1,12)の両辺に$\widetilde{P}$, $\widetilde{B}_p$, $\widetilde{B}_v$を代入してεの一次の係数を比較すると

(17) $P_1+\frac{1}{\mu}(B_p,B_{1p})=\frac{1}{\mu}(B_v,B_{1v})$

である。(8)の第3式と第4式，(10)の第1式を代入すると，

(18) $$\begin{cases}-\gamma P\,\mathrm{div}\,\xi+\frac{1}{\mu}(B_p,\mathrm{rot}(\xi\times B_p)+(\xi,\nabla)B_p)\\ \qquad =\frac{1}{\mu}(B_v,\mathrm{rot}\,\alpha+(\xi,\nabla)B_v).\end{cases}$$

この(18)を，(1.12)から遺伝した接続条件と見なす。

結局，(8)の第2式，(11)，(12)，(16)，(18)から，次の線形化MHD方程式（LMHD系と略す）の初期値境界値問題が得られたことになる。

<u>問題1</u>　ベクトル値関数の組 $\{\xi, \alpha\}$：

$$\xi = \xi(t, \mathbb{r}) : [0, \infty) \times \overline{\Omega_p} \ni (t, \mathbb{r}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha = \alpha(t, \mathbb{r}) : (0, \infty) \times \overline{\Omega_v} \ni (t, \mathbb{r}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

で次の条件(19)をみたすものを求めよ。

$$(19)\quad \begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + K\xi = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \Omega_p, \\ \xi(0, \mathbb{r}) = 0 & \text{in } \Omega_p, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\xi(0, \mathbb{r}) = v_1 & \text{in } \Omega_p, \\ -(\xi, n)B_v = \alpha \times n & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_p, \\ L(\xi, \alpha) = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_p. \\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\alpha = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \Omega_v, \\ n \times \alpha = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma \end{cases}$$

ここで

$$(20)\quad K\xi = -\mathrm{grad}\{(\xi, \nabla P) + \gamma P \,\mathrm{div}\,\xi\} - \frac{1}{\mu}\{\mathrm{rot}\,B \times \mathrm{rot}(\xi \times B) + [\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(\xi \times B)] \times B\},$$

$$(21)\quad L(\xi, \alpha) = -\gamma P \,\mathrm{div}\,\xi + \frac{1}{\mu}(B_p, \mathrm{rot}(\xi \times B_p) + (\xi, \nabla)B_p) - \frac{1}{\mu}(B_v, \mathrm{rot}\,\alpha + (\xi, \nabla)B_v)$$

である。

以上の導出法は，Bernstein et al [1]，宮本[4]などに記述されているものを整理したものである。

2）線形化MHD作用素

前小節の問題1を，Ushijima[6]，Ushijima−Nakamura−Hanada[7]では，ヒルベルト空間$X=\{L^2(\Omega_p)\}^3$における発展方程式：

$$(22)\begin{cases} M\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+A\xi=0, & t>0, \\ \xi(0)=\xi^1, \quad \dfrac{d\xi}{dt}(0)=\xi^0 \end{cases}$$

の初期値を$\{\xi^1, \xi^0\}=\{0, v\}$とする問題と見なしうることを示した。当然しかるべき条件を平衡解に対して要請する。(22)におけるMは平衡状態における質量$\rho=\rho(\mathbf{r})$を乗ずる作用素であり，

$$(23)\quad 0<\underline{\rho}\le\rho(\mathbf{r})\le\overline{\rho}<\infty \qquad , \mathbf{r}\in\Omega_p$$

なる正定数$\underline{\rho}$と$\overline{\rho}$が存在するものとしている。Aは微分作用素Kの空間Xでの実現とみなしうる自己共役作用素である。

筆者達の要請した仮定は次の(A.1)〜(A.6)である。

(A.1) Ω, Ω_p, Ω_vはいずれも有界な連結領域で，その境界はC^3級である。

(A.2) $B|_{\Omega_p}$と$B|_{\Omega_v}$は，それぞれ，$C^2(\overline{\Omega_p})$と，$C^2(\overline{\Omega_v})$に属す拡張をもつ。

(A.3) $P|_{\Omega_p}$ は正であり，$C^2(\overline{\Omega_p})$に属す拡張をもつ。(Γ_p では0になり得る。) その臨界点集合 $C_P=\{\mathbb{r}\in\Omega_p: (\nabla P)(\mathbb{r})=0\}$ は有限個の連結成分よりなり，おのおのの連結成分は C^3級の単純曲線であるか，又は C^3級の曲面であってその曲面上の各点で$\mathbb{B}$が接平面に含まれているかのいずれかである。

(A.4) $$\overline{P_1}=\sup_{\mathbb{r}\in\Omega_p-C_P}\|(\mathbb{B},\nabla)e\|_{\mathbb{R}^3}<\infty$$

又は，

$$\overline{P_2}=\sup_{\mathbb{r}\in\Omega_p}\frac{\|\nabla P\|_{\mathbb{R}^3}}{|P|^{1/2}}<\infty$$

のいずれかが成立つ。ここで，$e=\nabla P/\|\nabla P\|_{\mathbb{R}^3}$ である。

(A.5) $\mathbb{B}_p$ はΓ_p上で決して0にならない

か，又は

PはΩ_p上で正定数で下からおさえられる

のいずれかが成立する。

(A.6) Ω_pからΩ_vへ向かうΓ_p上の単位法線ベクトルに沿った微分$\frac{\partial}{\partial n}$に関して食い違い：

$$G=\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathbb{B}^2}{2\mu}\Big|_v-\frac{\partial}{\partial n}\Big(P+\frac{\mathbb{B}^2}{2\mu}\Big)\Big|_p$$

はΓ_p上の非負のC^1級関数である。

自己共役作用素Aを線形化MHD作用素とよぶ。この作用

素は（19）の第4式から第7式で表わされるベクトルポテンシャルに関する条件をある意味で含んでいるものである。

3）線形化MHD作用素確立のための数学的事実

プラズマ領域Ω_p上のベクトル関数ξが与えられたとすると（19）の第4式から第7式をみたすαは存在し，rot αはξに対して（ある意味で）一意に決る。したがって第4式から第7式を，ξに関する同次境界条件：

（24）　$L(\xi)=0$

と考えてよいというのが筆者達の主張するところである。この推論の基礎になるのはMorrey[5]のTheorem 7.8.2からしたがう次の補題1である。

補題1　ΩをR^3内の有界領域でC^2級の境界Γをもつものとする。任意の$\eta\in \mathbb{H}^1(\Omega)$に対して，次の条件をみたす$w\in \mathbb{H}^1(\Omega)$が存在する。

$$(25)\begin{cases} \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,w=0 & \text{in } \Omega, \\ n\times w=n\times\eta & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

ここで，Ω上の1階のソボレフ空間$H^1(\Omega)$を，

$$H^1(\Omega)=\{f\in L^2(\Omega):\tfrac{\partial}{\partial x_i}f\in L_2(\Omega),\ i=1,2,3\}$$

によって定め，$\mathbb{H}^1(\Omega)=\{H^1(\Omega)\}^3$とする。(25)

における微分作用素 rot rot は超関数の意味であり，n は Γ 上の外向き単位法線ベクトルである。補題1から次の命題2がしたがう。

命題2　任意の $\xi \in \mathbb{H}^1(\Omega_p)$ に対して次の条件（26）をみたす $\alpha \in \mathbb{H}^1(\Omega_v)$ が存在する。

$$
(26)\begin{cases} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\alpha = 0 & \text{in } \Omega_v, \\ n \times \alpha = -(n.\xi) B_v & \text{on } \Gamma_p. \\ n \times \alpha = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases}
$$

さらにこのような α に対して，$\operatorname{rot}\alpha$ は一意に定まる。

この命題2に注意すると，$\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}^1(\Omega_p)$ 上に次のプラズマエネルギー二次形式 a を定めることができる。

$$
(27)\begin{cases} a = a_p + a_s + a_v, \quad a_p = a_1 + a_2, \\ a_1(\xi,\eta) = \int_{\Omega_p}\{\gamma P \operatorname{div}\xi \operatorname{div}\eta + \frac{1}{\mu}(\operatorname{rot}(\xi\times B), \operatorname{rot}(\eta\times B))\}dv, \\ a_2(\xi,\eta) = \int_{\Omega_p}\{(\xi,\nabla P)\operatorname{div}\eta - \frac{1}{\mu}(\operatorname{rot}(\xi\times B), \eta\times\operatorname{rot}B)\}dv, \\ a_s(\xi,\eta) = \int_{\Gamma_p} G(\xi,n)(\eta,n)\,d\Gamma, \\ a_v(\xi,\eta) = \int_{\Omega_v}\frac{1}{\mu}(\operatorname{rot}\alpha, \operatorname{rot}\beta)\,dv. \end{cases}
$$

ここで，a_s の右辺における G は（A.6）で定めたものであり，a_v の右辺における α は命題2で ξ に対して定まるものであり，β は命題2の ξ を η として定まるものである。

$a_2(\xi, \eta)$は見掛け上非対称であるが，PとBが平衡解であることと，臨界点集合$\mathcal{P}$に対する仮定(A. 3)を使って，ξとηについて対称であることを示すことができる。

一般に$\mathbb{H}^m(\Omega) = \{H^m(\Omega)\}^3$とする。

<u>命題3</u>　$\xi \in \mathbb{H}^2(\Omega_p)$と$\eta \in \mathbb{H}^1(\Omega_p)$に対して

(28) $\displaystyle\int_{\Omega_p} (K\xi, \eta)\, dV = a(\xi, \eta) + \int_{\Gamma_p} L(\xi, \alpha)(n, \eta)\, d\Gamma.$

ここで右辺のαは，命題2でξに対して定まるものである。

この命題3は"境界条件"$L(\xi, \alpha) = 0$は微分作用素Kに対するいわば自然境界条件の役割をしていることを示唆する。本質的境界条件に対応する

(29)　$(\xi, n) = 0 \quad \text{on } \Gamma_p$

を採用する問題は固定境界問題とよばれている。摂動変位として境界と直交する成分を持つものは許さないことを意味している。

仮定(A. 1)～(A. 6)を使って，対称二次形式$a(\xi, \eta)$は下半有界であることがわかる。すなわちある$\kappa_0 \in \mathbb{R}$があって

(30) $\begin{cases} a(\xi, \eta) + \kappa(\xi, \eta)_{\mathbb{L}^2(\Omega_p)} \geq 0 \\ \kappa \geq \kappa_0, \quad \xi, \eta \in \mathbb{H}^1(\Omega_p) \end{cases}$

となる。筆者達は，Lüst-Martensen [3]による真空磁場の表示式をソボレフ空間のわくで証明しなおした上で

$a_\kappa(\xi,\eta)=a(\xi,\eta)+\kappa(\xi,\eta)$ が $\mathbb{V}_0=\mathbb{H}^1(\Omega_p)$ 上で $\kappa\geq\kappa_0$ なら可閉である，すなわち $\{\xi_m\}\subset\mathbb{V}_0$ が

$$(31)\begin{cases}\|\xi_m\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_p)}\to 0 \quad (m\to\infty)\\ \text{かつ}\\ a_\kappa(\xi_m-\xi_{m'})\to 0 \quad (m,m'\to\infty)\\ \text{ならば}\\ a_\kappa(\xi_m)\to 0 \quad (m\to\infty),\end{cases}$$

$(a_\kappa(\xi)=a_\kappa(\xi,\xi)^{1/2})$ であることを示し，$\mathbb{V}_0$ の a_κ ノルムによる完備化 $\mathbb{V}$ を定義域とする二次形式 a の拡張に対応する自己共役作用素を A としたのであった。

最近の Lawrence－Shen［2］は同様の問題をあつかっているが，(31) に対応する部分の推論は不十分のように思われる。

4) エネルギー原理

始めに，ベクトル関数の組 $\hat{\xi}=\{\xi,\alpha\}$ を要素とする次の試験関数の空間 $\hat{W}$ を用意する。

$$(32)\quad \hat{W}=\{\hat{\xi}=\{\xi,\alpha\}\in\mathbb{H}^1(\Omega_p)\times\mathbb{H}^1(\Omega_v): \\ n\times\alpha=-(\xi,n)B_v \ \text{ on } \Gamma_p, \\ n\times\alpha=0 \ \text{ on } \Gamma\}$$

$\hat{W}\ni\hat{\xi},\hat{\eta}$ に対して次のように二次形式 $\hat{a}(\hat{\xi},\hat{\eta})$ を定め

よう。$\hat{\xi}=\{\xi,\alpha\}$, $\hat{\eta}=\{\eta,\beta\}$ とする。

(33) $\hat{a}(\hat{\xi},\hat{\eta})=a_p(\xi,\eta)+a_s(\xi,\eta)+\hat{a}_v(\alpha,\beta)$.

ここで $a_p(\xi,\eta)$, $a_s(\xi,\eta)$ は(27)で決るものであり，$\hat{a}_v(\alpha,\beta)$ は(27)の $a_v(\xi,\eta)$ の右辺で定めるものとする。

次に $\mathbb{L}^2(\Omega_p)=\{L^2(\Omega_p)\}^3$ に内積：

(34) $m(\xi,\eta)=\int_{\Omega_p}\rho(\xi,\eta)_{\mathbb{R}^3}\,d\mathbb{r}$

をいれたヒルベルト空間を X_p とする。条件(23)に注意する。

(35) $A_p\xi=\rho^{-1}A\xi \quad \text{for } \xi\in D(A_p)=D(A)$

で定まる作用素 A_p は X_p で自己共役である。A_p のスペクトル集合を $\sigma(A_p)$ とし，

(36) $\lambda=\inf\sigma(A_p)$

とおくと

$$\lambda=\inf_{\xi\in D(A)}\frac{a(\xi,\xi)}{m(\xi,\xi)}=\inf_{\xi\in\mathbb{V}}\frac{a(\xi,\xi)}{m(\xi,\xi)}=\inf_{\xi\in\mathbb{V}_0}\frac{a(\xi,\xi)}{m(\xi,\xi)}$$

である。次の定義は線形安定性理論の基本となるものである。

<u>定義4</u> 平衡解，$\{\rho,\ v=0,\ P,\ J,\ B,\ E=0\}$ は，$\lambda>0$，$\lambda=0$，$\lambda<0$ に応じて，それぞれ，安定，中立，不安定とよばれる。

発展方程式(22)は，平衡解が不安定ならば，$t\to\infty$ のと

き指数関数的に増大する解をもち，安定ならばそのようなことはない。不安定のとき，

(37) $\underline{\lambda} = -\gamma^2$

とおき，γを不安定性の成長率と称する。

Bernstein et al. [1] で主張されているエネルギー原理に対応して次の定理を主張できる。

<u>定理5</u> 平衡解は，全ての $\hat{\xi} = \{\xi, \alpha\} \in \hat{W}$ に対して，$\hat{a}(\hat{\xi}, \hat{\xi}) \geq 0$ ならば，安定又は中立であり，ある $\hat{\xi} = \{\xi, \alpha\} \in W$ に対して $\hat{a}(\hat{\xi}, \hat{\xi}) < 0$ ならば不安定である。

文献

[1] Bernstein, I., Frieman, E., Kruskal, M., and Kulsrud, R., An energy principle for hydromagnetic stability problems, Proc. Royal Soc. A. <u>244</u> (1958), 17－40.

[2] Laurence, P., and Shen, M. C., Justification of the MHD energy principle for the stability of a confined toroidal plasma, Comm. Pure and Applied Math. <u>36</u> (1983) 233－252.

[3] Lüst, von R., and Martensen, E., Zur Mehrwertigkeit des skalaren magnetischen Potentials beim hydromagnetischen Stabilitätsproblem eines Plasmas, Z. Naturforsch, A. 15 (1960) 706-713.

[4] 宮本健郎, 核融合のためのプラズマ物理 (岩波書店 東京, 1976).

[5] Morrey Jr., C., Multiple integrals in the calculus of variations, (Springer, Berlin, 1966).

[6] Ushijima, T., On the linearized magnetohydrodynamic systems of equations for a contained plasma in a vacuum region, Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, V, 509-527 (North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1982).

[7] Ushijima, T., Nakamura, M., and Hanada, T., On the linearized magnetohydrodynamic system appeared in the plasma confined study, in handwriting manuscript, Univ. of Electro-Communications (1984).